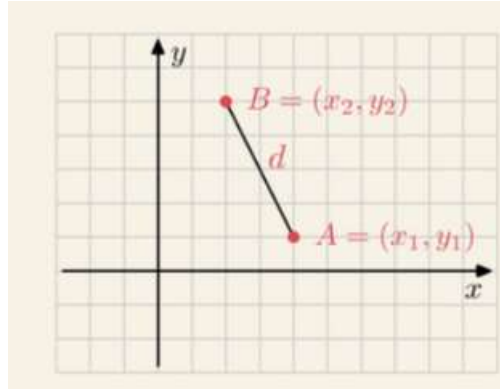


Geometria analityczna - powtórzenie.

1

Odległość punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej



$$A = (x_1, y_1) \quad \text{i} \quad B = (x_2, y_2)$$

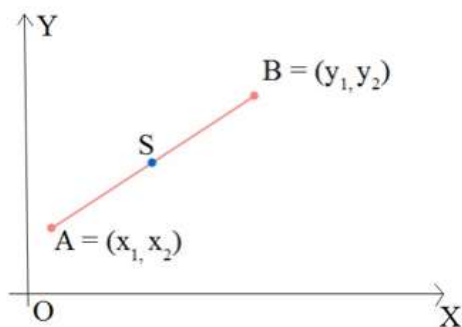
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Odległość między punktami $A = (2, 5)$ i $B = (5, 9)$ wynosi

$$|AB| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (9 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

2

Wzór na środek odcinka na płaszczyźnie ma postać:



Punkty A i B o współrzędnych $A = x_1, x_2$ oraz $B = y_1, y_2$ wyznaczają końce odcinka.

Jeśli $\vec{AS} = \vec{SB}$, to:

$$S = (x_s, y_s) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

3

Równanie kierunkowe i ogólne prostej

Jak wiemy, wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta. Dlatego też:

Równanie $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Podobnie jak w funkcji liniowej, tak i w równaniu kierunkowym współczynnik a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**, zaś b nazywamy **wyrazem wolnym**.

Istnieje też inna postać prostej:

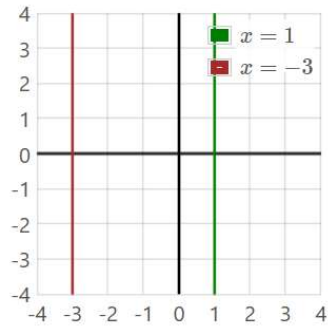
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

W równaniu ogólnym prostej:

- $2x + y - 6 = 0$ mamy: $A = 2, B = 1, C = -6$,
- $2y + 1 = 0$ mamy: $A = 0, B = 2, C = 1$,

4

- prosta $x - 1 = 0$, czyli $x = 1$ jest równoległa do osi Oy i przecina oś Ox w punkcie 1,
- prosta $x + 3 = 0$, czyli $x = -3$ jest równoległa do osi Oy i przecina oś Ox w punkcie -3 .



wykresy prostych typu $x - b = 0$, czyli $x = b$

proste te nie są funkcjami, gdyż jednemu x przyporządkowanych jest nieskończenie wiele wartości y

5

Proste równoległe i prostopadłe

Niech będą dane dwie proste:

$$y = a_1x + b_1$$

oraz

$$y = a_2x + b_2$$

Proste są **równoległe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe, czyli:

$$a_1 = a_2$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Zadania

1	<p>Dane są równania czterech prostych:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">$k: y = \frac{1}{2}x + 5$</div><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">$l: y = 2x + 5$</div></div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start; margin-top: 10px;"><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">$m: y = -2x + 3$</div><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">$n: y = 2x - 5$</div></div> <p>Prostopadłe są proste</p> <p>A. <i>l i n</i> B. <i>l i m</i> C. <i>k i n</i> D. <i>k i m</i></p> <p>Patrz punkt 5.</p>
2	<p>Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$.</p> <p>A. $y = 3x$ B. $y = -3x$ C. $y = 3x + 2$ D. $y = \frac{1}{3}x + 2$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"><p>Przypomnij sobie, że prosta, która nie jest prostopadła do żadnej osi układu współrzędnych i przechodzi przez początek układu współrzędnych ma równanie $y = ax$</p></div>
3	<p>Punkty $B = (-2, 4)$ i $C = (5, 1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe</p> <p>A. 74 B. 58 C. 40 D. 29</p>

Przypomnij sobie wzór na odległość punktów (patrz punkt 1) i oblicz długość boku BC (patrz punkt 1)

- 4 Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$.
- A. $y = \frac{1}{2}x$ B. $y = -\frac{1}{2}x$ C. $y = 2x$ D. $y = -2x$

Prosta opisana jest równaniem w postaci ogólnej (patrz punkt 3)
Zapisz ją w postaci kierunkowej i dopiero potem podaj odpowiedź.
Zobacz przykład:

Aby móc z równania ogólnego otrzymać równanie kierunkowe prostej musimy mieć w równaniu ogólnym y (jeśli y nie ma, to równanie kierunkowe nie istnieje). Wystarczy wtedy z równania ogólnego wyliczyć y .

Zadanie. Przekształć równanie ogólne prostej $-x + 5y - 3 = 0$ do postaci kierunkowej.

$$-x + 5y - 3 = 0$$

Wyliczamy y :

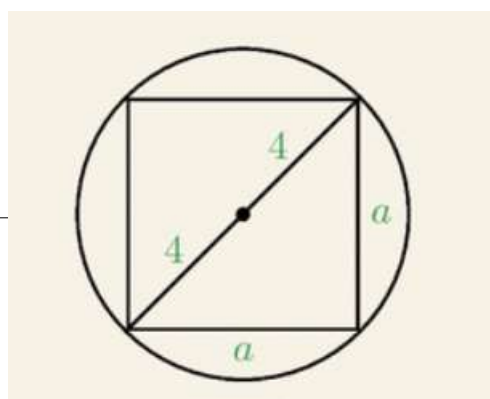
$$5y = x + 3 \quad | : 5$$

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

Otrzymaliśmy równanie kierunkowe prostej.

- 5 Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa
- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. 4

Wskazówka:



6	<p>Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$</p> <p>A. są równoległe i różne B. są prostopadłe C. przecinają się pod kątem innym niż prosty D. pokrywają się</p> <p>Patrz punkt 5</p>
7	<p>Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x + m - 2$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy</p> <p>A. $m = 2$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -2$</p> <p>Patrz punkt 5 Proste opisane są równaniami kierunkowymi, pamiętaj aby dobrze wyznaczyć w obu równaniach współczynniki kierunkowe.</p>
8	<p>Na płaszczyźnie z układem współrzędnych proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie $A = (-2, 4)$. Prosta k jest określona równaniem $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. Zatem prostą l opisuje równanie</p> <p>A. $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ B. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$ C. $y = 4x - 12$ D. $y = 4x + 12$</p> <p>Wskazówka: Każda prosta prostopadła do prostej k będzie miała równanie $y = 4x + b$. Aby obliczyć b skorzystaj z informacji, że punkt A leży na szukanej prostej.</p>
9	<p>Proste o równaniach $y = (m+2)x + 3$ oraz $y = (2m-1)x - 3$ są równoległe, gdy</p> <p>A. $m = 2$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m = 1$</p>

	<p>Patrz punkt 5</p> <p>Proste opisane są równaniami kierunkowymi, pamiętaj aby dobrze wyznaczyć w obu równaniach współczynniki kierunkowe.</p>
10	<p>Punkt $K = (2, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM, w którym $KM = LM$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N = (4, 3)$. Zatem</p> <p>A. $L = (5, 3)$ B. $L = (6, 4)$ C. $L = (3, 5)$ D. $L = (4, 6)$</p> <p>Wskazówka: Jaką własność ma wysokość trójkąta równoramiennego opuszczona na jego podstawę? Zastosuj wzór na współrzędne środka odcinka.</p>
11	<p>Proste o równaniach $y = (2m + 2)x - 2019$ oraz $y = (3m - 3)x + 2019$ są równoległe, gdy</p> <p>A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = 5$</p> <p>Proste opisane są równaniami kierunkowymi, pamiętaj aby dobrze wyznaczyć w obu równaniach współczynniki kierunkowe.</p>
12	<p>Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -4x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = (\frac{1}{2}, 0)$, gdy</p> <p>A. $a = -4$ i $b = -2$ B. $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{8}$ C. $a = -4$ i $b = 2$ D. $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$</p> <p>Patrz punkt 5</p> <p>Pamiętaj, że punkt leży na prostej o podanym równaniu wtedy, gdy jego współrzędne spełniają to równanie.</p>

